

## TD 9 : Fonctions usuelles

### Fonctions puissances, exponentielle, etc.

**1** ★★ Soit  $f$  la fonction définie pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$  par  $f(x) = x^x$ . Par une étude de fonction, montrer que  $f$  admet un minimum sur  $\mathbb{R}_+^*$ . Donner la valeur du minimum ainsi que le ou les points en lesquels il est atteint.

**2** ★★ Déterminer, lorsqu'elles existent, les limites des fonctions suivantes, aux points indiqués.

- 1)  $x \mapsto \frac{\ln x}{x^2}$  en  $+\infty$ .
- 2)  $x \mapsto x e^{\frac{1}{x}}$  en  $0^+$ .
- 3)  $x \mapsto x^{\frac{1}{x}}$  en  $+\infty$ .
- 4)  $x \mapsto (1+x)^{\frac{1}{x^2}}$  en  $0^+$ .
- 5)  $x \mapsto x^{-3} \ln(1+e^x)$  en  $+\infty$ .
- 6)  $x \mapsto \exp\left(-\frac{1}{x^3}\right) \times \ln x$  en  $0^+$ .

**3** ★★ Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les (in)équations suivantes :

- 1)  $2e^{3x} - 5e^{2x} + 2e^x \leq 0$
- 2)  $\ln(3-x) + \ln(2) - 2\ln(x+1) \geq 0$
- 3)  $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^x$

**4** ★★ Résoudre dans  $\mathbb{R}^2$  les systèmes suivants :

$$\begin{cases} x+y &= 7 \\ \ln x + \ln y &= 10 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} 8^x &= 10y \\ 2^x &= 5y \end{cases}$$

### Fonctions trigonométriques

**5** ★★ Simplifier les expressions suivantes :

- 1)  $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
- 2)  $\arctan\left(\tan\left(\frac{9\pi}{4}\right)\right)$
- 3)  $\cos(2\arccos x)$
- 4)  $\cos(2\arcsin x)$
- 5)  $\tan(2\arctan x)$
- 6)  $\sin(2\arctan x)$
- 7)  $\cos^2(\arctan x)$
- 8)  $\tan(\arcsin x)$

**6** ★★ Soit  $n \in \mathbb{N}$  et  $x \in \mathbb{R}$ .

Calculer  $\sum_{k=0}^n \operatorname{ch}(kx)$ . En déduire  $\sum_{k=0}^n k \operatorname{sh}(kx)$

**7** ★★ Montrer que la fonction  $\operatorname{sh} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est une bijection. On notera  $\operatorname{argsh}$  sa bijection réciproque.

1) Montrer que la fonction  $\operatorname{argsh}$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ , et calculer sa dérivée. Dresser le tableau de variations de la fonction  $\operatorname{argsh}$ .

2) Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\operatorname{argsh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

**8** ★★ On souhaite montrer de deux façons différentes l'identité :

$$\forall x \in [-1, 1] \quad \arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}$$

1) On pose  $f : x \mapsto \arccos x + \arcsin x$ . Dériver  $f$  et en déduire le résultat voulu.

2) (a) Montrer que pour tout  $x \in [-1, 1]$ , il existe  $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  tel que  $x = \sin y$ .  
(b) En déduire le résultat voulu.

**9** ★★ Démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Obtenir une formule similaire pour  $x \in \mathbb{R}_-^*$ .

**10** ★★ Soit  $a, b \in D_{\tan}$  tels que  $a + b \in D_{\tan}$ .

- 1) Rappeler la formule qui exprime  $\tan(a+b)$  en fonction de  $\tan a$  et de  $\tan b$ .
- 2) En déduire  $\arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{3}\right)$ .

**11** ★★★

- 1) Peut-on trouver une fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(\operatorname{ch}(x)) = e^x$  ?
- 2) Peut-on trouver une fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(\operatorname{sh}(x)) = e^x$  ?

**12** ★★★ Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes :

1)  $\arccos x = \arcsin(2x)$

2)  $\arctan(2x) = \arcsin x$

3)  $\arcsin(\tan x) = x$

4)  $\arctan x + \arctan(2x) = \frac{\pi}{4}$

5)  $\arcsin(x+1) - \arcsin x = \frac{\pi}{3}$